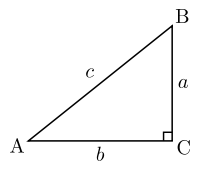
**مبرهنة فيثاغورس المباشرة**

وهي الشكل الأكثر شهرة لمبرهنة فيثاغورس:

**« في مثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين المحاذيين للزاوية القائمة. »**

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Rtriangle.svg&filetimestamp=20060306223549)

في مثلث ABC قائم الزاوية في C، أي أن [AB] هو الوتر، نضع AB=c و AC=b و BC=a. لدينا:

BC^2+AC^2=AB^2\,

أو

a^2+b^2=c^2\,

تمكن مبرهنة فيثاغورس من حساب طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية بمعرفة طولي الضلعين الآخرين. مثلا: إذا كان b=3 و a=4 فإن

a^2+b^2=3^2+4^2=25=c^2\,

ومنه c = 5\,.

مثلوث ثلاثة أعداد صحيحة تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية، مثل (5 ،4 ،3)، يسمى مثلوث فيثاغورس.

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=3)**] مبرهنة فيثاغورس العكسية**

نص مبرهنة فيثاغورس العكسية (العبارة 47 من الجزء الأول من كتاب العناصر [لإقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3" \o "إقليدس)):

**« في مثلث، إذا كان مربع طول أطول ضلع يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن هذا المثلث قائم الزاوية. الزاوية القائمة هي الزاوية المقابلة لأطول ضلع، والضلع الأطول هو الوتر. »**

مبرهنة فيثاغورس هي خاصية مميزة للمثلث القائم الزاوية. بتعبير آخر:

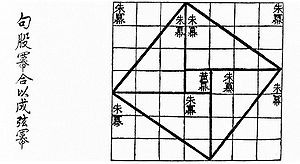
« في مثلث ABC، إذا كان AC²+BC²=AB² فإن هذا المثلث قائم الزاوية في C.»

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=4)**] تاريخ المبرهنة**

عرفت خاصية فيثاغورس في العصور القديمة، والدلائل على ذلك ما زالت موجودة إلى الآن. يكفي مثلا أن نلاحظ الحبل ذا ثلاث عشرة عقدة الذي كان المسّاحون المصريون يستعملونه والذي نجد له صورا في عدة تصاوير للأعمال الزراعية. يسمح هذا الحبل، علاوة على قياس المسافات، بإنشاء زوايا قائمة دون الحاجة إلى [جيب التمام](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AC%D9%8A%D8%A8_%D8%A7%D9%84%D8%AA%D9%85%D8%A7%D9%85)، إذ تسمح العقد الثلاث عشرة (والمسافات الاثنتي عشرة الفاصلة بين العقد) من إنشاء مثلث أبعاده (5 ،4 ،3)، مثلث يتضح أنه قائم الزاوية. ظل هذا الحبل أداة هندسية طيلة العصور الوسطى.

أقدم تمثيل لمثلوثات فيثاغورس (مثلث قائم الزاوية وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة طبيعية) نجده في [الميغاليثات](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%8A%D8%BA%D8%A7%D9%84%D9%8A%D8%AB&action=edit&redlink=1" \o "ميغاليث (الصفحة غير موجودة)) (2500 سنة قبل الميلاد). كما أظهرت آثار [البابليين](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AD%D8%B6%D8%A7%D8%B1%D8%A9_%D8%A8%D8%A7%D8%A8%D9%84%D9%8A%D8%A9" \o "حضارة بابلية) (لوحة Plimpton، حوالي سنة 1800 قبل الميلاد) أنه قبل ظهور [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "فيثاغورس) بأكثر من 1000 سنة، عرف المهندسون وجود [مثلوثات فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AB%D9%84%D9%88%D8%AB_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "مثلوث فيثاغورس).

لكن بين اكتشاف الخاصية «نلاحظ أن بعض المثلثات القائمة الزاوية تحقق هذه الخاصية»، تعميمها «يبدو أن كل المثلثات القائمة الزاوية تحقق هذه الخاصية» وإثباتها «كل المثلثات القائمة الزاوية (فقط) في المستوى الإقليدي تحقق هذه الخاصية» عدة أجيال.

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Chinese_pythagoras.jpg&filetimestamp=20050411032050)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.17/common/images/magnify-clip.png](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Chinese_pythagoras.jpg&filetimestamp=20050411032050)

برهان بصري لمثلث أطوال أضلاعه (3، 4، 5) في كتاب Chou Pei Suan Ching (القرن الثاني-القرن الخامس قبل الميلاد)

ندرة الدلائل التاريخية تجعلنا غير قادرين على نسب المبرهنة إلى [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "فيثاغورس) بشكل قاطع، مع أننا على يقين بأنه صاحبها. أول برهان مكتوب نجده في كتاب العناصر [لإقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3" \o "إقليدس) بالصيغة التالية:

« في المثلثات القائمة الزاوية، مربع طول الضلع المقابل للزاوية القائمة يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين. »

مع صيغتها العكسية: « إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة. »

ومع ذلك، فتعليقات Proclus على كتاب العناصر لإقليدس (حوالي 400 سنة بعد الميلاد) تشير إلى أن [إقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3) لم يقم سوى بإعادة تدوين برهان قديم نسبه Proclus إلى فيثاغورس.

إذن، يمكننا أن نؤرخ البرهان على هذه الخاصية ما بين القرن الثالث والقرن السادس قبل الميلاد. يحكى أنه في تلك الفترة اكتشفت [الأعداد اللاجذرية](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D8%B9%D8%AF%D8%AF_%D9%84%D8%A7%D8%AC%D8%B0%D8%B1%D9%8A&action=edit&redlink=1" \o "عدد لاجذري (الصفحة غير موجودة)). بالفعل، يمكن بسهولة إنشاء مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين طول أحدهما 1، فيكون مربع طول الوتر هو 2. برهان بسيط أيام [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "فيثاغورس) يثبت أن العدد 2 ليس مربعا لعدد جذري. يقال أن هذا الاكتشاف تم إبقاؤه سرا من طرف المدرسة الفيثاغورسية تحت تهديد بالقتل.

إلى جانب هذه الاكتشافات، يبدو أن هذه المبرهنة عرفت في [الصين](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AC%D9%85%D9%87%D9%88%D8%B1%D9%8A%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D8%B5%D9%8A%D9%86_%D8%A7%D9%84%D8%B4%D8%B9%D8%A8%D9%8A%D8%A9" \o "جمهورية الصين الشعبية) أيضا. نجد إشارة إلى وجود هذه المبرهنة في واحد من أقدم المؤلفات الصينية في الرياضيات، كتاب Zhoubi suanjing. هذا المؤلف، كتب على الأغلب في Han Dynasty (أعظم الفترات في تاريخ الصين)، (206 قبل الميلاد، 220 سنة بعد الميلاد) يضم التقنيات المستعملة في فترة Zhou Dynasty. (القرن العاشر قبل الميلاد، 256 قبل الميلاد). نجد برهان هذه الخاصية، التي تحمل في الصين اسم مبرهنة جوجو Gougu (القاعدة والارتفاع)، في كتاب Jiuzhang suanshu (الفصول التسعة في فن الرياضيات، 100 سنة قبل الميلاد، 50 سنة بعده)، برهان مختلف كليا عن برهان [إقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3).

كما نجد في [الهند](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A7%D9%84%D9%87%D9%86%D8%AF) برهانا عدديا للخاصية يعود إلى القرن الثالث قبل الميلاد (برهان باستعمال أعداد خاصة، لكن يمكن تعميمه بسهولة).

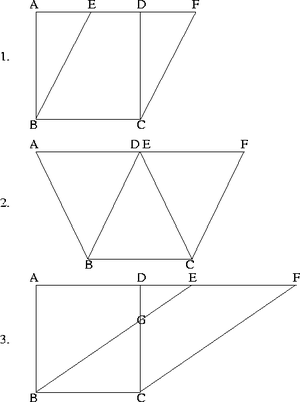
رغم أنها خاصية هندسية، إلا أنها أخذت منحى حسابيا عند البحث عن جميع مثلوثات أعداد صحيحة طبيعية تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية: أي [مثلوثات فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AB%D9%84%D9%88%D8%AB_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "مثلوث فيثاغورس). هذا البحث فتح الباب لبحث آخر: البحث عن المثلوثات التي تحقق *an* + *bn* = *cn*، بحث قاد إلى [مظنونة فيرما](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%B1%D9%85%D8%A7_%D8%A7%D9%84%D8%A3%D8%AE%D9%8A%D8%B1%D8%A9" \o "مبرهنة فيرما الأخيرة) التي تم حلها سنة 1994 على يد الرياضي ([بالإنكليزية](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%84%D8%BA%D8%A9_%D8%A5%D9%86%D9%83%D9%84%D9%8A%D8%B2%D9%8A%D8%A9" \o "لغة إنكليزية): Andrew Wiles).

توجد في الحقيقة العديد من البراهين على هذه الخاصية، مثل برهان [إقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3)، وبرهان [الصينيين](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AC%D9%85%D9%87%D9%88%D8%B1%D9%8A%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D8%B5%D9%8A%D9%86_%D8%A7%D9%84%D8%B4%D8%B9%D8%A8%D9%8A%D8%A9" \o "جمهورية الصين الشعبية)، مرورا ببرهان [الهنود](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A7%D9%84%D9%87%D9%86%D8%AF" \o "الهند)، وبرهان [دا فينشي](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%84%D9%8A%D9%88%D9%86%D8%A7%D8%B1%D8%AF%D9%88_%D8%AF%D8%A7_%D9%81%D9%8A%D9%86%D8%B4%D9%8A" \o "ليوناردو دا فينشي) وحتى برهان الرئيس الأمريكي ([بالإنكليزية](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%84%D8%BA%D8%A9_%D8%A5%D9%86%D9%83%D9%84%D9%8A%D8%B2%D9%8A%D8%A9" \o "لغة إنكليزية): James Abram Garfield). كما لا يفوتنا ذكر [الكاشي](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A7%D9%84%D9%83%D8%A7%D8%B4%D9%8A" \o "الكاشي) الذي عمم هذه المبرهنة على كل المثلثات: [مبرهنة الكاشي](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D9%83%D8%A7%D8%B4%D9%8A).

**[[عدل](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=5" \o "حرر القسم: براهين)] براهين**

بلا شك، هذه المبرهنة لديها أكبر عدد معروف من الإثباتات (كما هو الحال بالنسبة لخاصية Quadratic reciprocity). ها هي بعض منها:

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=6)**] برهان إقليدس**

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:PPythagore2.png&filetimestamp=20070110195203)

قبل البرهنة على خاصية [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "فيثاغورس)، يجب إثبات عبارتين. العبارة الأولى التي يجب إثباتها (العبارة 35 من الجزء الأول من كتاب العناصر) هي تساوي مساحتي [متوازيي أضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9" \o "متوازي أضلاع) لهما نفس القاعدة ونفس الارتفاع:

« [متوازيات الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) التي لها قاعدة مشتركة، ومحصورة بين نفس المستقيمين المتوازيين، لها نفس المساحة. »

لنعتبر [متوازيي الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) ABCD و BCFE، لديهما قاعدة مشتركة [BC]، ومحصوران بين المتوازيين (BC) و(AF)، لاحظ أن AD=BC (لأنهما قاعدتا متوازي الأضلاع ABCD)، و BC=EF (لأنهما قاعدتا متوازي الأضلاع BCFE)، وبالتالي AD=EF.

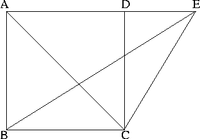
توجد ثلاثة حالات فقط (مبينة في الشكل جانبه) لموضع النقطة E بالنسبة إلى D : يمكن أن توجد E على يسار D، منطبقة على D أو على يمين D. سندرس كل حالة:

1. إذا كانت E على يسار D فإن [ED] مشتركة بين كل من [AD] و[EF]، ومنه نستطيع التحقق من أن المسافتين AD و EF متساويتين. لاحظ أن الضلعين [AB] و[DC] متقايسان (لأنهما قاعدتان متقابلتان في [متوازي الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9" \o "متوازي أضلاع) ABCD)، والنقط D، E، A و F مستقيمية، الزاويتان [\widehat{BAE}]و[\widehat{CDF}] متقايستان. كنتيجة لهذا فالمثلثان BAE و CDF متقايسان، لأن لهما ضلعان متقايسان والزاويتان المحصورتان متقايستان. إذن، [متوازيي الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9" \o "متوازي أضلاع) ABCD و CBEF ليسا سوى ترتيبين مختلفين من [شبه المنحرف](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B4%D8%A8%D9%87_%D9%85%D9%86%D8%AD%D8%B1%D9%81" \o "شبه منحرف) BEDC والمثلث BAE (أو CDF).

2. إذا كانت E منطبقة على D، سنجد بطريقة مشابهة أن المثلثين BAE و CDF متقايسان، وأنه من الممكن الحصول على متوازيي الأضلاع ABCD و BCFE بإضافة المثلث BAE (أو CDF) إلى المثلث المشترك BCD.

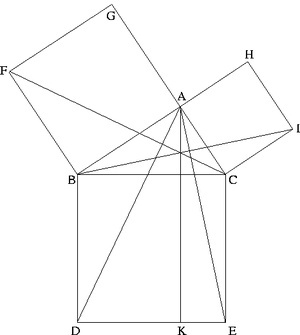
3. إذا كانت E على يمين D، لدينا AD=EF، وبإضافة DE لكل منهما نجد أن AE=DF. وبطريقة مشابهة لتلك التي إستعملناها في 1 و 2، يمكن أن نبين أن المثلثين BAE و CDF، وأيضا شبهي المنحرف BADG و CGEF، متقايسان. إذن من الواضح أنه يمكن الحصول على متوازيي الأضلاع ABCD و CBEF عن طريق إضافة المثلث المشترك BCG إلى [شبه المنحرف](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B4%D8%A8%D9%87_%D9%85%D9%86%D8%AD%D8%B1%D9%81" \o "شبه منحرف) BADG (أو CGEF).

استبدال [متوازي أضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) بمتوازي أضلاع آخر له نفس القاعدة والارتفاع يعرف في الرياضيات باسم [القص](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%82%D8%B5" \o "قص). هذا الأخير مهم جدا في إثبات العبارة التالية:

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:PPythagore3.png&filetimestamp=20070205220920)

« إذا كان لمتوازي أضلاع ولمثلث نفس القاعدة، ومحصورين بين مستقيمين متوازيين، فإن مساحة متوازي الأضلاع هي ضعف مساحة المثلث. »

لنعتبر متوازي أضلاع ABCD، ولتكن E نقطة من نصف المستقيم (AD] ولا تنتمي إلى القطعة [AD]. نريد إثبات أن مساحة ABCD هي ضعف مساحة BEC. بعد رسم القطر [AC]، نلاحظ أن مساحة ABCD هي ضعف مساحة ABC. ولدينا مساحة ABC تساوي مساحة BEC (لأن لهم نفس القاعدة). إذن ضعف مساحة BEC هي ضعف مساحة ABC، أي ABCD. ومنه مساحة ABCD هي ضعف مساحة BEC المثلث.

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:PEuclide.png&filetimestamp=20070205220833)

نستطيع الآن متابعة البرهان:

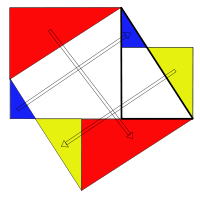
نعتبر مثلثا ABC قائم الزاوية في A. لتكن ABFG ،ACIH و BCED مربعات الأضلاع AB ،AC و BC على التوالي. لتكن J نقطة تقاطع (BC) و(AK). نريد إثبات أن مساحة BCED تساوي مجموع مساحتي ABFG و ACIH. يمكننا هذا عن طريق إثبات أن مساحة المربع ABFG تساوي مساحة المستطيل BJKD، وأن مساحة المربع ACIH تساوي مساحة المستطيل CEKJ.

لإثبات المتساوية الأولى، يمكن أن نلاحظ أن المسافتين FB و BC تساويان AB و BD على التوالي. لأن الزاويتان [\widehat{ABF}]و[\widehat{CBD}] متقايستان، والزاويتان [\widehat{FBC}](لاحظ أن \widehat{FBC}=\widehat{FBA}+\widehat{ABC}) و\widehat{ABD} (لاحظ أن \widehat{ABD}=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}) متقايستان. كنتيجة، لدينا المثلثان FBC و ABD متقايسان. لاحظ أيضا أنه حسب العبارة XLI، مساحة المربع ABFG هي ضعف مساحة المثلث FBC وأن مساحة المستطيل BJKD هي ضعف مساحة المثلث ABD. بما أن المثلثين ABD و FBC متقايسان، فإن مساحة ABFG تساوي مساحة BJKD.

نحصل على المتساوية الثانية بطريقة مشابهة: بملاحظة أن IC و CB يساويان AC و CE على التوالي، وأن الزاوية [\widehat{ICB}]تقايس الزاوية [\widehat{ACE}]، نحصل على أن المثلثين ICB و ACE متقايسان. وعلما أن مساحة المربع ACIH هي ضعف مساحة المثلث ICB وأن مساحة المستطيل CEKJ هي ضعف مساحة ACE، وبما أن المثلثين ICB و ACE متقايسان، فإن مساحة ACIH تساوي مساحة CEKJ.

وبالتالي، مساحة BCED تساوي مساحة مجموع مساحتي BJKD و CEKJ، أي مجموع مساحتي ABFG و ACIH. وتكون مبرهنة فيثاغورس حالة خاصة ل[مبرهنة كليرو](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%83%D9%84%D9%8A%D8%B1%D9%88&action=edit&redlink=1" \o "مبرهنة كليرو (الصفحة غير موجودة)).

**[[عدل](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=7" \o "حرر القسم: برهان جوجو)] برهان جوجو**

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Gougu1.svg&filetimestamp=20060715172247)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.17/common/images/magnify-clip.png](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Gougu1.svg&filetimestamp=20060715172247)

لغز جوجو

تمت إعادة صياغة مبرهنة جوجو Gougu انطلاقا من تعليقات وملاحظات الرياضي الصيني Liu Hui (القرن الثالث بعد الميلاد) على كتاب « الفصول التسعة في فن الرياضيات » (206 قبل الميلاد، 220 بعده) وعلى كتاب Zhoubi Suanjian « ظل الدوائر، كتاب في Calculus » (كتاب في علم الفلك).

هذا البرهان يعتمد على مبدأ لعبة اللغز Puzzle: مساحتان متساويتان بعد تقطيع وتركيب. يذكر أن [إقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3) استعمل نفس المبدأ ([القص](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D8%A7%D9%84%D9%82%D8%B5&action=edit&redlink=1" \o "القص (الصفحة غير موجودة))) تقريبا. في الشكل جانبه، المثلث القائم الزاوية مرسوم بلون غامق، مربع أطول ضلع من ضلعي الزاوية القائمة رسم خارج المثلث، بينما نقوم بالعكس بالنسبة للضلعين الآخرين.

المثلث الأحمر يقايس المثلث البدئي. طول أطول ضلع من ضلعي الزاوية القائمة في المثلث الأصفر يساوي طول أصغر ضلع في المثلث البدئي، وزوايا هذين المثلثين متقايسة. طول أطول ضلع من ضلعي الزاوية القائمة في المثلث الأزرق يساوي فرق طولي ضلعي الزاوية القائمة للمثلث البدئي وزواياهما متقايسة أيضا.

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=8)**] البرهنة باستعمال الجداء السلمي (المتجهات)**

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A

\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}

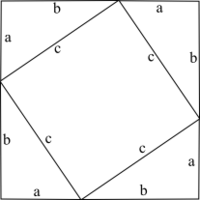
\overrightarrow{CB}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2

CB^2=AB^2+AC^2-2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}

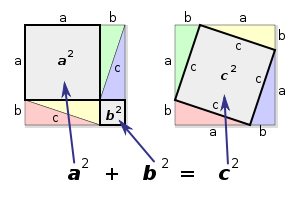
بما أن ABC قائم الزاوية في A فإن \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0

ومنه *BC*2 = *AB*2 + *AC*2

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=9)**] برهان حديث**

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Pythagoralg.png&filetimestamp=20051210113216)

لنعتبر مثلثا قائم الزاوية حيث قياسات أضلاعه هي b ،a و c. نقوم بنسخ المثلث ثلاث مرات بحيث يشكل كل ضلع طوله a مستقيما مع ضلع طوله b لمثلث آخر. نحصل في الأخير على مربع طول ضلعه a+b، كما في الصورة.

لنحسب مساحة المربع المحدد بالأضلاع ذات الطول c. بالطبع المساحة هي c²، وتساوي أيضا فرق مساحة المربع الكبير ذو الضلع a+b ومجموع مساحات المثلثات الأربع. مساحة المربع الكبير هي ²(a+b) لأن طول ضلعه هو a+b. ومجموع مساحات المثلثات هي أربع مرات مساحة مثلث واحد، أي 4(ab/2)، إذن الفرق هو (a+b)²-4(ab/2) بالتبسيط a²+b²+2ab-2ab أي a²+b². بهذا نكون قد برهنا على أن مساحة المربع ذو الضلع c تساوي a²+b²، أي a²+b²=c². [](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Pythagorean_proof.svg&filetimestamp=20090606214548)

توجد طرق عديدة أخرى لإثبات مبرهنة [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "فيثاغورس)، حتى الرئيس الأمريكي الواحد والعشرون [جيمس جارفيلد](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AC%D9%8A%D9%85%D8%B3_%D8%AC%D8%A7%D8%B1%D9%81%D9%8A%D9%84%D8%AF) ([بالإنكليزية](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%84%D8%BA%D8%A9_%D8%A5%D9%86%D9%83%D9%84%D9%8A%D8%B2%D9%8A%D8%A9): James Garfield) برهن، بطريقة قريبة من الطريقة السابقة، على مبرهنة [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3" \o "فيثاغورس).

**[[عدل](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=10" \o "حرر القسم: أشكال أخرى للمبرهنة)] أشكال أخرى للمبرهنة**

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=11)**] استلزامها المضاد للعكس**

نص الاستلزام المضاد للعكس:

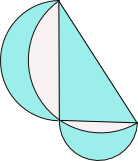
« إذا كانت أطوال أضلاع مثلث ABC تحقق BC^2 \ne AB^2+AC^2\,\!فإن المثلث ABC ليس قائما في النقطة A. »

رغم أن [الاستلزام المضاد للعكس](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D8%A7%D8%B3%D8%AA%D9%84%D8%B2%D8%A7%D9%85_%D9%85%D8%B6%D8%A7%D8%AF_%D9%84%D9%84%D8%B9%D9%83%D8%B3&action=edit&redlink=1" \o "استلزام مضاد للعكس (الصفحة غير موجودة)) يكافئ منطقيا [المبرهنة](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9" \o "مبرهنة) المباشرة، إلا أن استعماليهما مختلفان: فمبرهنة فيثاغورس المباشرة تستعمل لحساب طول ضلع مثلث قائم الزاوية بدلالة طولي الضلعين الآخرين، في حين أن استلزامها المضاد للعكس يستعمل لإثبات كون مثلث (قياسات أضلاعه معلومة) ليس قائم الزاوية.

**[**[**عدل**](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=12)**] الاستلزام المضاد للعكس للخاصية العكسية**

يقول ما يلي: « إذا كان المثلث ABC ليس قائم الزاوية في A فإن BC^2 \ne AB^2+AC^2\,\! »

**[[عدل](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=13" \o "حرر القسم: تعميم على أشكال هندسية أخرى غير المربعات)] تعميم على أشكال هندسية أخرى غير المربعات**

[](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Lunules.png&filetimestamp=20051209145220)

[http://bits.wikimedia.org/skins-1.17/common/images/magnify-clip.png](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D9%84%D9%81:Lunules.png&filetimestamp=20051209145220)

مبرهنة الهلالين

عمم [إقليدس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D8%B3) مبرهنة [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3) في كتابه العناصر (العبارة 31، الجزء VI من كتاب العناصر):

« في المثلثات القائمة الزاوية، مساحة شكل مرسوم على الوتر، يساوي مجموع مساحتي الشكلين [المشابهين](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D8%B4%D8%A7%D8%A8%D9%87" \o "تشابه) له المرسومين على ضلعي الزاوية القائمة. »

بتعبير آخر: « إذا أنشأنا أشكالا [متشابهة](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D8%B4%D8%A7%D8%A8%D9%87" \o "تشابه) على أضلاع مثلث قائم الزاوية، فإن مساحتي الشكلين الصغيرين تساوي مساحة الشكل الكبير. »

هذه الخاصية تسمح لنا بالبرهنة على أن مساحة مثلث تساوي مجموع مساحتي الهلالين المرسومين على ضلعي الزاوية القائمة: [مبرهنة الهلالين](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D9%87%D9%84%D8%A7%D9%84%D9%8A%D9%86&action=edit&redlink=1" \o "مبرهنة الهلالين (الصفحة غير موجودة)).

**[[عدل](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3&action=edit&section=14" \o "حرر القسم: استعمالاتها)] استعمالاتها**

* تسمح مبرهنة فيثاغورس بحساب المسافة بين نقطتين في [معلم](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%B9%D9%84%D9%85" \o "معلم) متعامد بدلالة [إحداثياتهما الديكارتية](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A5%D8%AD%D8%AF%D8%A7%D8%AB%D9%8A%D8%A7%D8%AA_%D8%AF%D9%8A%D9%83%D8%A7%D8%B1%D8%AA%D9%8A%D8%A9" \o "إحداثيات ديكارتية)، إذا كانت *A*(*xa*,*ya*) و*B*(*xb*,*yb*) نقطتان من [المستوي الإقليدي](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%B3%D8%AA%D9%88%D9%8A_%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D9%8A" \o "مستوي إقليدي)، فإن المسافة بينهما هي:

 \sqrt{(x_b-x_a)^2 + (y_b-y_a)^2} 

إذا كانت (*xb*,*ya*) إحداثيتا نقطة C في نفس [المعلم](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%B9%D9%84%D9%85" \o "معلم)، فإن المثلث ACB قائم الزاوية في C. المسافتان CA و CB معلومتان:

*CA* = | *xb* − *xa* |

*CB* = | *yb* − *ya* |

بينما تمثل المسافة AB طول وتر المثلث ACB.

* بشكل عام، في [فضاء إقليدي](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D8%B6%D8%A7%D8%A1_%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D9%8A) (أو [فضاء تآلفي إقليدي](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%81%D8%B6%D8%A7%D8%A1_%D8%AA%D8%A2%D9%84%D9%81%D9%8A_%D8%A5%D9%82%D9%84%D9%8A%D8%AF%D9%8A&action=edit&redlink=1))، المسافة من (x_1, \dots, x_k)إلى (y_1,\dots, y_n)تساوي:

 \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}{(x_k-y_k)^2}}

* يمكن أن نعتبر [مبرهنة Parseval](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_Parseval&action=edit&redlink=1" \o "مبرهنة Parseval (الصفحة غير موجودة)) تعميما لمبرهنة فيثاغورس في [فضاء الجداء الداخلي](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D8%B6%D8%A7%D8%A1_%D8%A7%D9%84%D8%AC%D8%AF%D8%A7%D8%A1_%D8%A7%D9%84%D8%AF%D8%A7%D8%AE%D9%84%D9%8A).
* تعمم مبرهنة فيثاغورس على [التبسيطات](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D8%AA%D8%A8%D8%B3%D9%8A%D8%B7%D8%A9&action=edit&redlink=1" \o "تبسيطة (الصفحة غير موجودة)) ذات الأبعاد الكبيرة. إذا كان [لرباعي أوجه](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B1%D8%A8%D8%A7%D8%B9%D9%8A_%D8%A3%D9%88%D8%AC%D9%87" \o "رباعي أوجه) ركن قائم (ركن من [مكعب](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%83%D8%B9%D8%A8))، فإن مربع مساحة الوجه المقابل للركن، يساوي مجموع مربعات مساحات الأوجه الثلاثة الأخرى. تعرف هذه المبرهنة أيضا باسم [مبرهنة Gua](http://ar.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%A8%D8%B1%D9%87%D9%86%D8%A9_Gua&action=edit&redlink=1" \o "مبرهنة Gua (الصفحة غير موجودة)).